

## **RELATÓRIO FINAL – IFSP**

### **MÓDULO DE PROGRAMA PARA ANÁLISE ESTRUTURAL DE LAJES RETANGULARES SIMPLESMENTE APOIADAS PELO MÉTODO DE LÉVY**

Jonatan Vitor de Melo Fernandes, (18) 997505186,  
jonatan.fernandes@outlook.com.br

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo-IFSP  
Rua Pedro Vicente, 625 – Canindé – São Paulo-SP  
CEP: 01109-010  
Telefone: 11-3775-4570  
e-mail: prp@ifsp.edu.br

Gustavo Cabrelli Nirschl, (17) 99153-2885, nirschl@gmail.com

#### **RESUMO**

Um grupo de pesquisa cadastrado e ativo no CNPq vem produzindo diversos programas para computador e disponibilizando-os *on-line* via *site* de modo que esses programas possuem a característica de gerar relatório com todos os cálculos realizados de maneira a viabilizar o estudo e não somente a obtenção dos resultados. Sendo assim, foi criado, em projetos anteriores, um ambiente CAD-Lajes, chamado IFESTRUT-LAJES (disponível em <https://vtp.ifsp.edu.br/nev/lfestrut-lajes/lfestrutlajes.html>), onde o usuário pode desenhar lajes, tornando-se possível realizar quaisquer análises estruturais a partir dos dados de entrada do usuário. Sendo assim, neste trabalho e dentro das premissas citadas, apresenta-se a criação de um módulo para o ambiente CAD-Lajes utilizando as linguagens de página de internet (HTML/JavaScript) assim como os outros programas do grupo de pesquisa em questão. O módulo proposto realiza a análise estrutural de lajes retangulares com bordas simplesmente apoiadas pela solução de Lévy para diversas condições de contorno e de carregamento.

### ***Introdução:***

Nos dias atuais, graças à evolução e inovação tecnológica, existem diversos programas que realizam a análise estrutural de vários tipos diferentes de estruturas. Posto isso, grande parte desses programas apresentam apenas os resultados dessas análises e não o processo necessário para obtê-los. Neste contexto, um grupo de pesquisa cadastrado e ativo no CNPq, chamado NEVE (Núcleo de Engenharia Virtual e Experimental), vem criando programas *on-line* que não só fazem cálculos, mas que demonstram todo o procedimento realizado, onde vários módulos foram criados para a análise de estruturas lineares planas, de maneira que tais módulos foram inseridos no programa chamado IFESTRUT. Dessa maneira, no ano de 2020 foi desenvolvido um *software* nos mesmos moldes, chamado IFESTRUT-LAJES, que possibilita o desenho de lajes para viabilizar a criação de módulos que realizam a análise estrutural desses elementos.

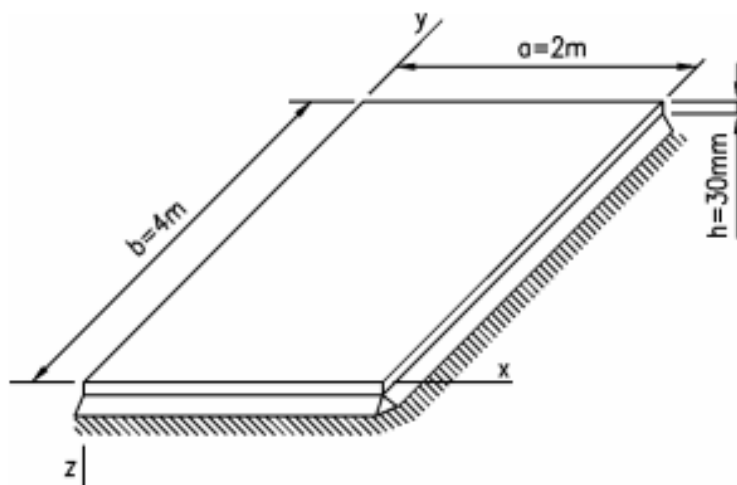
Neste sentido, o desenvolvimento dos aplicativos do grupo é realizado nas linguagens HTML/JavaScript, que podem ser estudadas em bibliografias como W3Schools (REFSNES DATA, 1998).

Sendo assim, surgiu-se a ideia da criação de um módulo para o programa IFESTRUT-LAJES que realiza a análise de estruturas de lajes retangulares com condições de contorno simplesmente apoiadas por meio da solução de Lévy. Além disso, o módulo também apresenta os resultados por meio de relatório em PDF (*portable document format*) que foi criado utilizando a biblioteca JavaScript chamada PDFMake (PAMPUCH; M., 2021).

Segundo Soares (2004), lajes são elementos estruturais que estão submetidos a carregamentos perpendiculares à superfície, ou seja, são modeladas como placas e podem ter diversas configurações geométricas, de maneira que possuem uma espessura muito menor que a largura e o comprimento. Além disso, neste elemento, podem existir esforços de flexão em duas direções ortogonais, diferentemente das vigas em flexão reta, que só apresentam esses esforços em uma direção. Sendo assim, na Figura 1 é

apresentada uma representação de laje retangular com bordas simplesmente apoiadas com uma espessura de 30 milímetros.

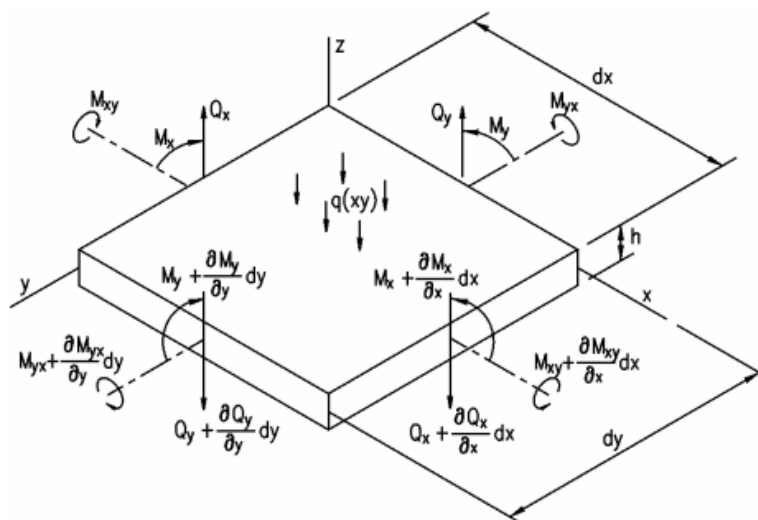
Figura 1: Laje retangular com bordas simplesmente apoiada.



Fonte: Soares, 2004.

Dessa maneira, de acordo com Soares (2004), o método de Lévy é a solução analítica de placas que utiliza a Teoria da Elasticidade, juntamente com a Teoria de Kirchhoff, de maneira que, com esse método, é possível obter resultados para diversas condições de contorno, utilizando equações que são obtidas por meio de relações entre deslocamentos e deformações bem como as tensões num ponto da placa, como pode ser visto na Figura 2. Essas equações de esforços internos apresentados por Soares (2004) surgem do equilíbrio de um elemento infinitesimal na placa, sendo elas: Cortantes, momentos e momento torção (Equações 1 a 5).

Figura 2: Elementos infinitesimais de uma placa sujeita a ação distribuída  $q$ .



Fonte: Soares, 2004.

Segundo Szilard (2004), a solução de Lévy consiste na resolução analítica de placas utilizando a equação de Sophie-Germain-Lagrange (Equação 6), de maneira que a resolução completa se dá pela soma de uma solução homogênea da equação de Lagrange com uma soma particular dessa mesma equação (vide Equação 8). A equação de Lagrange é uma equação diferencial de quarta ordem que define o deslocamento transversal da placa ( $w$ ) em função das coordenadas  $x$  e  $y$  sobre sua superfície média em planta e da carga distribuída  $p$ .

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$M_x = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu \partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (3)$$

$$M_y = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\nu \partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (4)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (6)$$

$$D = \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \quad (7)$$

$$w(x, y) = w_h(x, y) + w_p(x, y) \quad (8)$$

Em que:

$w \rightarrow$  Equação dos deslocamentos transversais de uma placa;

$p \rightarrow$  Função da carga na superfície da placa;

$D \rightarrow$  Rigidez à flexão da placa, obtida pela Equação 7;

$E \rightarrow$  Módulo de elasticidade do material;

$t \rightarrow$  Espessura da placa;

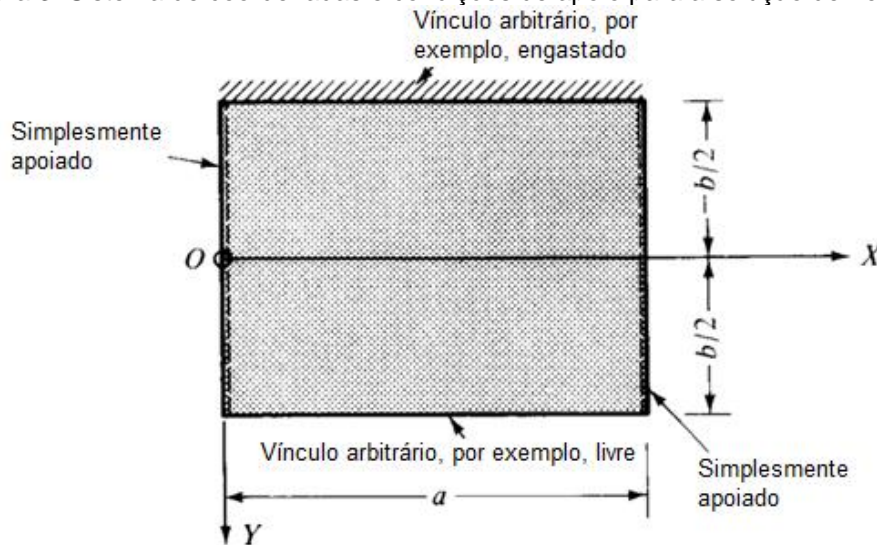
$\nu \rightarrow$  Coeficiente de Poisson;

$w_h \rightarrow$  Solução homogênea da equação de Lagrange;

$w_p \rightarrow$  Solução particular da equação de Lagrange;

Ainda de acordo com Szilard (2004), para a solução pelo método de Lévy, é necessário que a placa possua condições de contorno simplesmente apoiadas pelo menos em lados opostos, onde o autor define essas condições para  $x = 0$  e  $x = a$ , de forma que os outros dois lados possam ter condições de contorno arbitrárias. Além disso, para essa solução, o eixo de coordenadas é deslocado para  $x = 0$  e  $y = b/2$ , onde  $a$  é o comprimento da placa paralelo ao eixo  $x$  e  $b$  é o comprimento da placa paralelo ao eixo  $y$  e também é considerado que o comprimento  $b$  da placa tenda ao infinito, ou seja, que ele é infinitamente grande (Figura 3).

Figura 3: Sistema de coordenadas e condições de apoio para a solução de Lévy.



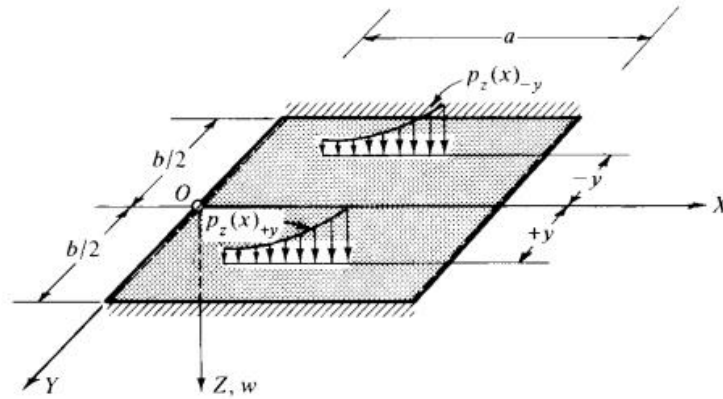
Fonte: Adaptado de Szilard, 2004.

Além disso, de acordo com Lisbôa (2009), essa dependência de duas bordas opostas serem apoiadas acontece porque a solução de Lévy remove a necessidade de calcular os coeficientes de interpolação de uma das direções da placa como uma forma de simplificação da solução. Dessa forma, a interpolação nessa solução é feita utilizando funções trigonométricas em uma direção e hiperbólicas na outra. Entretanto, o autor cita que a solução de Lévy pode apresentar assimetria em soluções que tecnicamente seriam simétricas. Isso acontece no eixo onde são utilizadas as funções de interpolações

trigonométricas, uma vez que a convergência para esses tipos de funções é mais lenta que para as funções hiperbólicas. Contudo, essa assimetria pode ser combatida utilizando uma grande quantidade de termos na solução, o que muitas vezes pode se tornar inviável.

Outra característica da solução de Lévy, segundo Szilard (2004), é que as funções de carregamento (cargas) devem ser as mesmas para todas as seções paralelas às direções de condições de contorno arbitrárias, nesse caso paralelas ao eixo x, conforme Figura 4.

Figura 4: Simetria das cargas no Método de Lévy.



Fonte: Szilard, 2004.

De acordo com Dias (2019), a solução de Lévy para a análise estrutural de placas surgiu da necessidade de um novo processo em relação à solução de Navier, de forma que a convergência fosse mais rápida. Posto isso, o autor afirma que a solução de Lévy converge rapidamente, às vezes até mesmo com o primeiro termo.

Como exemplo de solução analítica de uma laje retangular simplesmente apoiada nos 4 bordos sujeita a carregamento distribuído p, Soares (2004), apresenta a série, obtida pelo processo de Lévy, para a obtenção dos deslocamentos transversais w (Equação 9), considerando “a” paralelo ao eixo x e “b” paralelo ao eixo y (Figura 5).

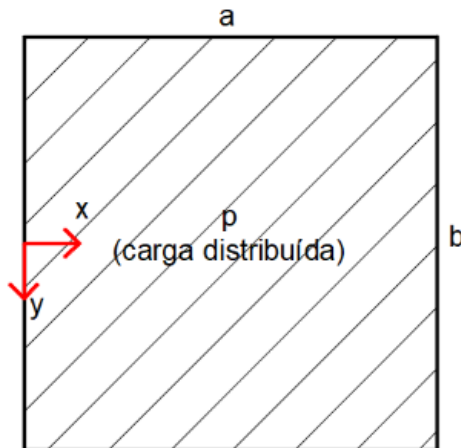
$$w = \frac{4pa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left( 1 - \frac{\alpha_m \tanh(\alpha_m)}{2 \cosh(\alpha_m)} \cosh\left(\frac{2\alpha_m y}{b}\right) + \frac{m\pi y}{2 \cosh(\alpha_m)} \sinh\left(\frac{2\alpha_m y}{b}\right) \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (9)$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a} \quad (10)$$

Em que:

$w$  → Equação dos deslocamentos transversais da placa;  
 $p$  → Carregamento distribuído em toda a placa;  
 $D$  → Rigidez à flexão da placa, obtida pela Equação 7;  
 $a$  → Comprimento da laje paralelo ao eixo  $x$ ;  
 $b$  → Comprimento da laje paralelo ao eixo  $y$ ;  
 $\alpha_m$  → Termo presente na Equação 10.

Figura 5: Laje retangular simplesmente apoiada nos 4 bordos sujeita a carregamento distribuído.



Fonte: O próprio autor, 2021.

Dessa maneira, nesse relatório final será apresentado o módulo desenvolvido e inserido dentro do programa IFESTRUT-LAJES que realiza a análise de estruturas de lajes retangulares com bordas simplesmente apoiadas sujeitas a carga distribuída sobre toda a superfície bem como a geração do relatório em PDF com os detalhes dessa resolução. Além disso, serão apresentadas também as contextualizações teóricas a respeito da solução de Lévy para cargas distribuídas sobre uma região ou concentrada.

### ***Justificativa:***

Atualmente, em decorrência da evolução e inovação tecnológica, existem diversos programas que realizam a análise estrutural de vários tipos diferentes de estruturas. Entretanto, grande parte desses programas apresentam apenas os resultados dessas análises e não o processo necessário para obtê-los. Nesse sentido, o módulo aqui apresentado e implementado no IFESTRUT-LAJES possibilita a análise de estruturas de lajes retangulares com condições de contorno simplesmente apoiadas por meio da solução de Lévy que apresenta os

resultados em relatório PDF (*portable document format*) de maneira que alunos, professores ou até mesmo profissionais da área possam utilizar como ferramenta de estudo e recurso auxiliar na metodologia de ensino.

**Objetivo:**

O objetivo desse relatório é apresentar a elaboração de um módulo de programa para a análise de estruturas de lajes retangulares simplesmente apoiadas sujeitas a carga distribuída em toda a laje, distribuída em uma região ou concentrada por meio da solução de Lévy, que fornece um relatório em PDF com todos os cálculos detalhados de maneira que alunos, professores ou até mesmo profissionais possam utilizar como ferramenta de estudo e recurso auxiliar na metodologia de ensino.

**DESENVOLVIMENTO (METODOLOGIA E ANÁLISE)**

Soares (2004), conforme mostrado no item INTRODUÇÃO, apresenta as equações necessárias para obter os esforços internos de uma placa (Equações 1, 2, 3, 4 e 5) utilizando a equação de deslocamento, obtida por meio resolução da equação de Lagrange (Equação 6), que, no caso do método de Lévy, representa a soma de uma solução homogênea com uma solução particular (Equação 8). Sendo assim, para o caso de uma placa simplesmente apoiada sujeita a carregamento distribuído sobre toda a superfície, o autor apresenta a Equação 9 como solução, de maneira que essa solução também pode ser confirmada por autores como Szilard (2004) e Timoshenko (1953).

Neste contexto, para a obtenção das soluções para os esforços de uma placa simplesmente apoiada sujeita a carregamento distribuído sobre toda a superfície, foram utilizadas as Equações 1, 2, 3, 4 e 5 citadas anteriormente, juntamente com a Equação 9. Em se tratando de cálculos complexos, em decorrer da quantidade de termos presentes nas equações, foi utilizada uma calculadora de derivadas *on-line* chamada Derivative Calculator (SCHERFGEN, 2021) para a obtenção das Equações 11, 12, 13, 14 e 15 abaixo.



$$Q_x = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[ \frac{2q \left( \pi m y \sinh\left(\frac{2\alpha_m y}{b}\right) + a \left( 2 \cosh(\alpha_m) - (\alpha_m \tanh(\alpha_m) + 2) \cosh\left(\frac{2\alpha_m y}{b}\right) \right) \right) \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right)}{\pi^2 \cosh(\alpha_m) m^2} - \frac{8a^2 \alpha_m q \left( \pi \alpha_m m y \sinh\left(\frac{2\alpha_m y}{b}\right) + \left( \pi b m - a \alpha_m (\alpha_m \tanh(\alpha_m) + 2) \cosh\left(\frac{2\alpha_m y}{b}\right) \right) \right) \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right)}{\pi^4 b^2 \cosh(\alpha_m) m^4} \right] \quad (11)$$

$$Q_y = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{2a q s e n\left(\frac{\pi m x}{a}\right)}{\pi^5 b^3 \cosh(\alpha_m) m^5} \left[ \frac{\pi^3 b^3 m^3 - 2\pi^2 a b^2 \alpha_m (\alpha_m \tanh(\alpha_m) + 2) m^2 -}{12\pi a^2 b \alpha_m^2 m + 8a^3 \alpha_m^4 \tanh(\alpha_m) + 16a^3 \alpha_m^3} \sinh\left(\frac{2\alpha_m y}{b}\right) + \frac{2\pi \alpha_m m (\pi b m - 2a \alpha_m) (\pi b m + 2a \alpha_m) y \cosh\left(\frac{2\alpha_m y}{b}\right)}{\pi^5 b^2 \cosh(\alpha_m) m^5} \right] \quad (12)$$

$$M_x = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[ \frac{2a q s e n\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \left( \pi m y \sinh\left(\frac{2\alpha_m y}{b}\right) + a \left( 2 \cosh(\alpha_m) - (\alpha_m \tanh(\alpha_m) + 2) \cosh\left(\frac{2\alpha_m y}{b}\right) \right) \right)}{\pi^3 \cosh(\alpha_m) m^3} - \frac{8a^3 \alpha_m q v s e n\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \left( \pi \alpha_m m y \sinh\left(\frac{2\alpha_m y}{b}\right) + \left( \pi b m - a \alpha_m (\alpha_m \tanh(\alpha_m) + 2) \cosh\left(\frac{2\alpha_m y}{b}\right) \right) \right)}{\pi^5 b^2 \cosh(\alpha_m) m^5} \right] \quad (13)$$

$$M_y = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[ \frac{2a q v s e n\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \left( \pi m y \sinh\left(\frac{2\alpha_m y}{b}\right) + a \left( 2 \cosh(\alpha_m) - (\alpha_m \tanh(\alpha_m) + 2) \cosh\left(\frac{2\alpha_m y}{b}\right) \right) \right)}{\pi^3 \cosh(\alpha_m) m^3} - \frac{8a^3 \alpha_m q s e n\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \left( \pi \alpha_m m y \sinh\left(\frac{2\alpha_m y}{b}\right) + \left( \pi b m - a \alpha_m (\alpha_m \tanh(\alpha_m) + 2) \cosh\left(\frac{2\alpha_m y}{b}\right) \right) \right)}{\pi^5 b^2 \cosh(\alpha_m) m^5} \right] \quad (14)$$

$$M_{xy} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[ \frac{2a^2 q (v-1) \left( (\pi b m - 2a \alpha_m (\alpha_m \tanh(\alpha_m) + 2)) \sinh\left(\frac{2\alpha_m y}{b}\right) + 2\pi \alpha_m m y \cosh\left(\frac{2\alpha_m y}{b}\right) \right) \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right)}{\pi^4 b \cosh(\alpha_m) m^4} \right] \quad (15)$$

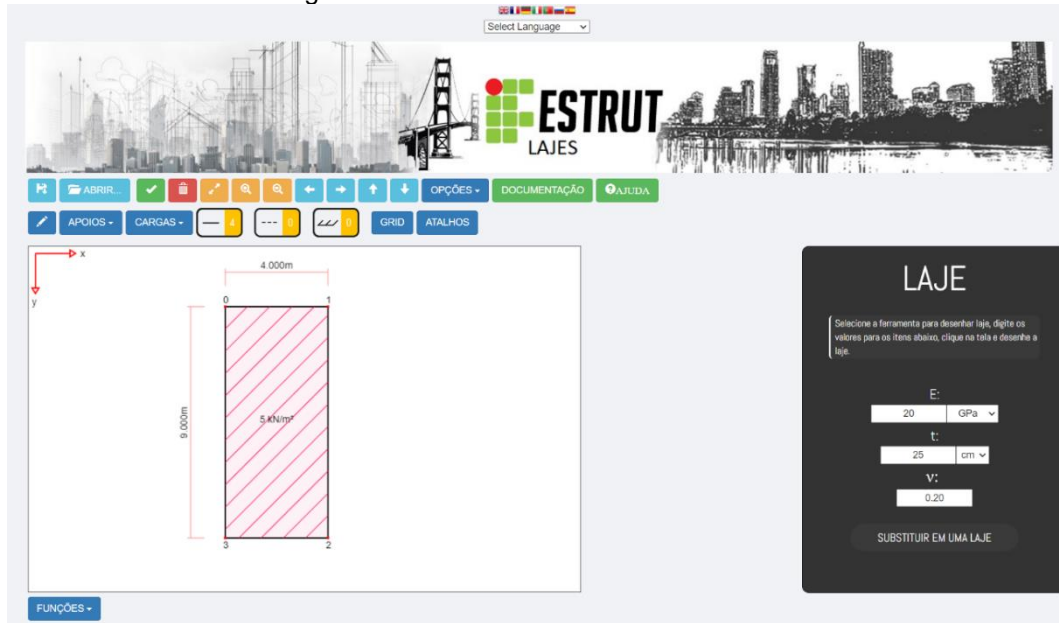
O módulo desenvolvido foi implementado no programa chamado IFESTRUT-LAJES, que pode ser acessado de forma *on-line* no *site* do NEVE (Núcleo de Engenharia Virtual e Experimental) pelo endereço <https://vtp.ifsp.edu.br/nev/>. Na Figura 6 está presente o local onde pode ser acessado o programa IFESTRUT-LAJES e na Figura 7 pode ser observada a tela inicial do programa juntamente com uma laje exemplo desenhada.

Figura 6: Site do NEVE - Acesso ao IFESTRUT-LAJES

Título e link	Data	Autor	Orientador	Tipo	Curso	Documentação
<a href="#">APOSTILA DIAGRAMAS ISOSTÁTICA</a>	12/04/2019	<a href="#">Prof. Gustavo Cabrelli Nirschl</a>	-	-	Engenharia Civil	-
<a href="#">COMPARAÇÃO MEF X MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS</a>	23/04/2020	<a href="#">Prof. Gustavo Cabrelli Nirschl</a>	-	-	Engenharia Civil	-
<a href="#">IFESTRUT</a> programa gráfico para análise de estruturas lineares	<a href="#">VÁRIAS</a>	<a href="#">VÁRIOS</a>	<a href="#">VÁRIOS</a>	<a href="#">VÁRIOS</a>	Engenharia Civil	<a href="#">VÁRIAS</a>
<a href="#">IFESTRUT - LAJES</a> programa gráfico para análise de lajes	<a href="#">VÁRIAS</a>	<a href="#">VÁRIOS</a>	<a href="#">VÁRIOS</a>	<a href="#">VÁRIOS</a>	Engenharia Civil	<a href="#">VÁRIAS</a>

Fonte: NEVE, 2022.

Figura 7: Tela inicial do IFESTRUT-LAJES.

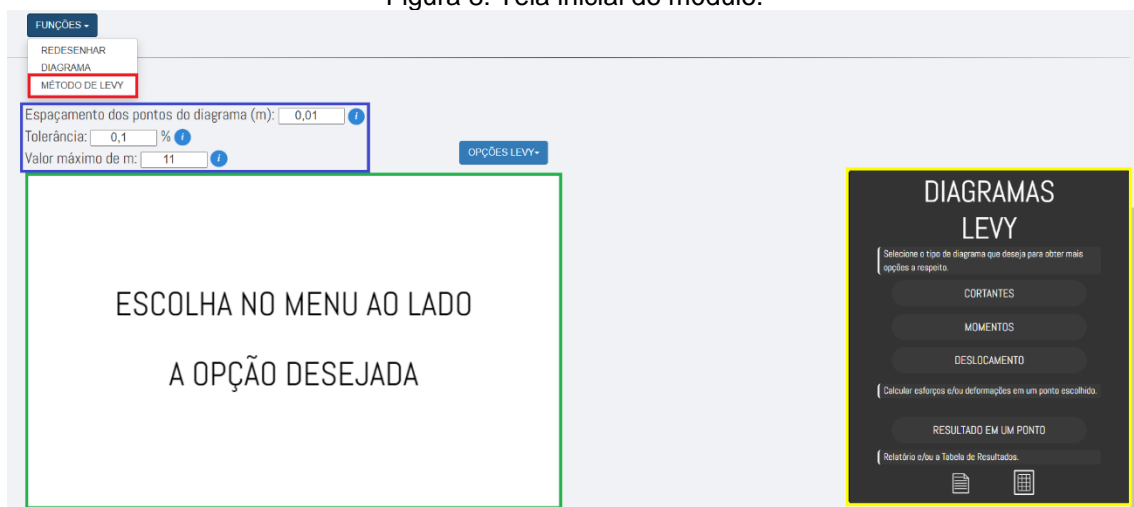


Fonte: O próprio autor, 2021.

O módulo em questão foi desenvolvido utilizando as linguagens de página de internet HTML/JavaScript, de maneira que também foram utilizadas algumas bibliotecas como por exemplo o SweetAlert2 para a exibição de alertas e mensagens de maneira intuitiva e o PDFMake para a criação do relatório que está presente no módulo.

Dessa forma, a solução pelo método de Lévy foi implementada no botão “FUNÇÕES”, como pode ser visto na Figura 8, marcado no retângulo vermelho.

Figura 8: Tela inicial do módulo.



Fonte: O próprio autor, 2021.

Além disso, na Figura 8, marcado com a cor azul, está presente a parte onde o usuário poderá entrar com os dados escolhidos para o espaçamento dos pontos do diagrama, tolerância da solução e valor máximo dos termos utilizados nas equações da solução. Nessa mesma figura também pode ser visualizada, marcado em verde, a tela onde serão visualizados os diagramas escolhidos pelo usuário, de maneira que essa tela foi desenvolvida utilizando o elemento canvas do HTML e adaptando esse elemento utilizando o JavaScript. Por fim, marcado em amarelo na lateral direita da tela, encontra-se o menu principal do módulo, que possibilita ao usuário escolher entre os sub-menus presentes na Figura 9, de cortantes, momentos ou deslocamento, bem como calcular um ponto específico ou gerar o relatório e/ou tabela de resultados.

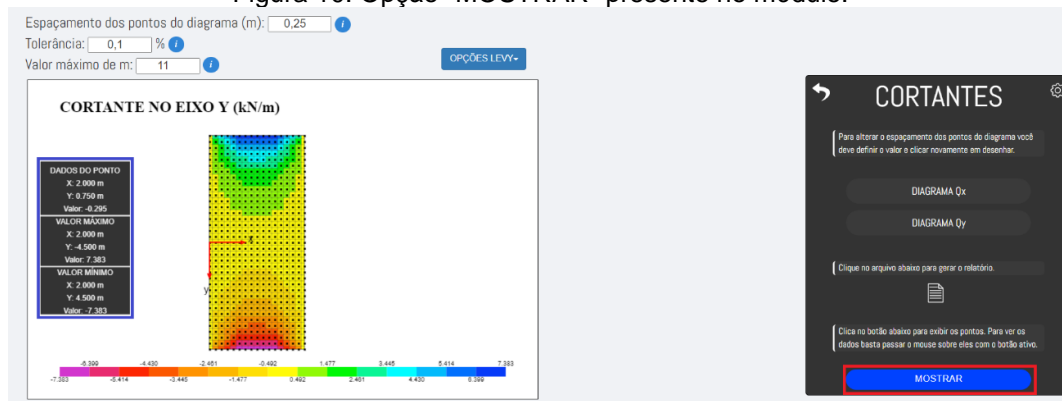
Figura 9: Menus para escolha de diagramas.



Fonte: O próprio autor, 2021.

Dentro dos menus presentes na Figura 9, também existe a opção “MOSTRAR” (destacada no retângulo vermelho da Figura 10) que marca os pontos no diagrama ao ser ativada, de maneira que, ao passar o mouse sobre os pontos no diagrama presente no elemento canvas, pode ser visualizado o valor do ponto e suas coordenadas, além dos dados do ponto com valor máximo e mínimo, observado destacado em azul na Figura 10.

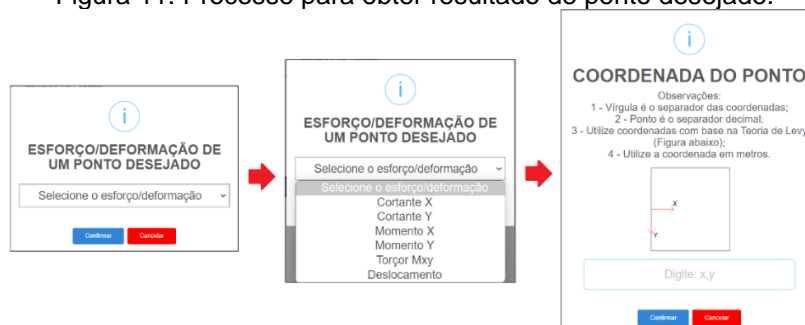
Figura 10: Opção "MOSTRAR" presente no módulo.



Fonte: O próprio autor, 2021.

O botão “RESULTADO EM UM PONTO” presente no menu principal da Figura 8 permite ao usuário obter o resultado de um ponto desejado, de maneira que, ao clicar no botão, irá aparecer uma aba onde deve ser escolhido o esforço ou deslocamento e depois deve ser definida a coordenada do ponto com base nas coordenadas da teoria do método de Lévy, conforme Figura 11.

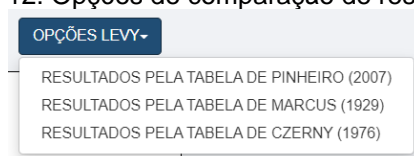
Figura 11: Processo para obter resultado de ponto desejado.



Fonte: O próprio autor, 2021.

Além disso, existe um botão chamado “OPÇÕES LEVY” acima do elemento canvas na Figura 8, esse botão permite ao usuário comparar os valores encontrados pelo método de Lévy com valores obtidos pelas tabelas de Pinheiro (2007), Marcus, disponíveis, por exemplo, em WILLIAN (2021) ou Czerny, disponíveis, por exemplo, em ARAÚJO (2015), como pode ser visto na Figura 12.

Figura 12: Opções de comparação de resultados.



Fonte: O próprio autor, 2021.

Com relação ao relatório que pode ser gerado, basta o usuário selecionar a opção “GERAR RELATÓRIO” que irá surgir uma tela perguntando quais as coordenadas do ponto desejado para ser calculado no relatório, como apresenta a Figura 13.

Figura 13: Geração do relatório PDF.

Fonte: O próprio autor, 2021.

O relatório foi desenvolvido utilizando a biblioteca PDFMake, juntamente com a linguagem JavaScript, de maneira que ele apresenta os dados de entrada da laje inserida pelo usuário, a introdução teórica da solução de Lévy, a teoria aprofundada da solução de Lévy para uma laje com condições de contorno simplesmente apoiada, os resultados finais do ponto escolhido e os diagramas dos esforços e deslocamento, como pode ser visto algumas partes desse relatório nas Figuras 14 e 15.

Figura 14: Parte do relatório PDF - Dados de entrada e introdução à solução de Lévy.

Tabela 2 - Dados dos apoios.		
Tipo de apoio	Índice	Lado
Apoiada	0	0-1
Apoiada	1	1-2
Apoiada	2	2-3
Apoiada	3	3-0

**CARGA SOBRE TODA LAJE**

Por meio da Tabela 3 podem ser observados os dados da Carga Sobre Toda Laje.

Tabela 3 - Dados da Cargas Sobre Toda Laje.	
Índice	Módulo (kN/m <sup>2</sup> )
0	5.000

**INTRODUÇÃO À SOLUÇÃO DE LEVY**

Fonte: O próprio autor, 2021.

Figura 15: Parte do relatório PDF - Método de Lévy para laje com carregamento sobre toda a superfície.

$A_m, B_m, C_m$  e  $D_m$  são valores constantes que precisam ser obtidos.

$$Y_m = \sum_{m=1}^{\infty} \left( A_m \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + B_m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + C_m y \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + D_m y \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (14)$$

Prosseguindo, para a obtenção da solução particular, Soares (2004) utilizou a série presente na Equação 15.

$$w_p = \sum_{m=1}^{\infty} k_m(y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (15)$$

Utilizando a Equação 15 foi desenvolvido o carregamento  $q(x,y)$  na forma de série simples, presente na Equação 16.

$$q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (16)$$

Onde  $q_m(y)$  é dado pela Equação 17 a seguir:

$$q_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q(x,y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx \quad (17)$$

Em seguida, substituindo a Equação 16 na equação de Lagrange, é obtida a Equação 18 que se apresenta:

$$k_m^{iv} - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 k_m'' + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 k_m = \frac{q_m}{D} \quad (18)$$

Dessa maneira, para a carga presente na Figura 5 e utilizando a Equação 17 para  $q(x,y)=q_0$ , o autor obtém a Equação 19 a seguir:

$$q_m = \frac{4q_0}{m\pi}, \text{ para } m = 1, 3, 5 \dots \quad (19)$$

Fonte: O próprio autor, 2021.

Foi desenvolvido também um arquivo em PDF com as tabelas de resultados de todos os pontos, uma vez que pode acontecer casos onde a quantidade de pontos calculada é muito grande, dependendo do espaçamento entre os pontos escolhido pelo usuário. Para acessar essas tabelas, basta clicar no ícone presente na parte inferior do menu principal da Figura 8 “GERAR TABELA DE ESFORÇOS/DEFORMAÇÃO”. Após isso, irá aparecer uma caixa onde o usuário pode escolher quais dados deseja visualizar, podendo ser apenas um, alguns ou todos, de maneira que as opções escolhidas fiquem com a cor roxa, como pode ser observado na Figura 16. Além disso, na Figura 17 é apresentado um exemplo de tabela de resultados gerada pelo módulo.

Figura 16: Opções disponíveis para gerar tabela de resultados.



Fonte: O próprio autor, 2021.

Figura 17: Exemplo de tabela de resultados.

x (m)	y (m)	Deslocamento (mm)	Mx (kN*m/m)	My (kN*m/m)	Mxy (kN*m/m)	Qx (kN/m)	Qy (kN/m)
0.125	-4.500	1.46e-15	2.10e-16	-2.64e-16	-5.296	-4.54e-16	1.449
0.875	-4.500	9.75e-15	2.26e-15	-2.76e-15	-3.805	-5.09e-16	5.723
1.625	-4.500	1.52e-14	4.43e-15	-4.88e-15	-1.361	4.49e-16	7.260
2.375	-4.500	1.52e-14	4.43e-15	-4.88e-15	1.361	-4.49e-16	7.260
3.125	-4.500	9.75e-15	2.26e-15	-2.76e-15	3.805	5.09e-16	5.723
3.875	-4.500	1.46e-15	2.10e-16	-2.64e-16	5.296	4.54e-16	1.449
0.125	-3.750	0.998	0.426	0.189	-4.542	4.788	0.494
0.875	-3.750	6.321	1.996	1.140	-3.404	2.271	2.974
1.625	-3.750	9.341	2.592	1.609	-1.236	0.683	4.191
2.375	-3.750	9.341	2.592	1.609	1.236	-0.683	4.191
3.125	-3.750	6.321	1.996	1.140	3.404	-2.271	2.974
3.875	-3.750	0.998	0.426	0.189	4.542	-4.788	0.494
0.125	-3.000	1.784	0.684	0.197	-3.358	6.908	0.250
0.875	-3.000	11.378	3.538	1.251	-2.577	3.735	1.591
1.625	-3.000	16.899	4.745	1.848	-0.953	1.176	2.348
2.375	-3.000	16.899	4.745	1.848	0.953	-1.176	2.348
3.125	-3.000	11.378	3.538	1.251	2.577	-3.735	1.591
3.875	-3.000	1.784	0.684	0.197	3.358	-6.908	0.250
0.125	-2.250	2.341	0.853	0.167	-2.265	8.016	0.133
0.875	-2.250	14.972	4.604	1.075	-1.752	4.568	0.856
1.625	-2.250	22.303	6.306	1.611	-0.654	1.477	1.282
2.375	-2.250	22.303	6.306	1.611	0.654	-1.477	1.282
3.125	-2.250	14.972	4.604	1.075	1.752	-4.568	0.856
3.875	-2.250	2.341	0.853	0.167	2.265	-8.016	0.133
0.125	-1.500	2.699	0.959	0.134	-1.366	8.600	0.0683
0.875	-1.500	17.288	5.283	0.868	-1.061	5.017	0.441
1.625	-1.500	25.793	7.321	1.308	-0.398	1.644	0.665
2.375	-1.500	25.793	7.321	1.308	0.398	-1.644	0.665
3.125	-1.500	17.288	5.283	0.868	1.061	-5.017	0.441
3.875	-1.500	2.699	0.959	0.134	1.366	-8.600	0.0683
0.125	-0.750	2.896	1.017	0.112	-0.638	8.883	0.0289
0.875	-0.750	18.565	5.657	0.724	-0.495	5.236	0.187
1.625	-0.750	27.719	7.873	1.092	-0.186	1.726	0.282
2.375	-0.750	27.719	7.873	1.092	0.186	-1.726	0.282
3.125	-0.750	18.565	5.657	0.724	0.495	-5.236	0.187

Fonte: O próprio autor, 2021.

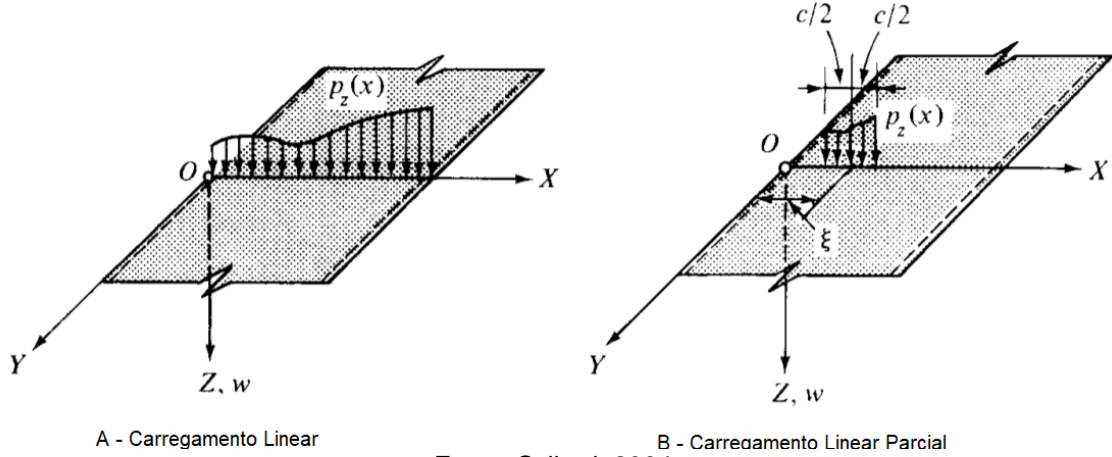
## SOLUÇÃO DE LÉVY PARA LAJE QUADRIPOIADA COM CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO EM UMA REGIÃO OU PONTUAL.

O método de Lévy é uma solução complexa e com poucas referências bibliográficas, de maneira que se torna difícil encontrar soluções resolvidas para muitas variações de carregamento.

Szilard (2004) disponibiliza algumas possibilidades para soluções de lajes com carregamento linear que, por superposição pode ser levado à um carregamento em região (retângulo), e que, levando o comprimento dessa linha a quase zero, pode ser uma carga pontual. Contudo, tais soluções, assim como escrito anteriormente, só resultam valores aceitáveis para lajes com comprimento infinito na direção “b” (Ver Figura 3).

Na Figura 18, podem ser observados os casos de carga linear e carga linear parcial, de maneira que a Equação 16 refere-se à solução para carga linear e a Equação 17 à solução para a carga linear parcial, apresentadas por Szilard (2004), onde  $p_0$  é o valor constante da carga linearmente distribuída.

Figura 18: Carregamento linear e linear parcial, segundo Szilard (2004).



Fonte: Szilard, 2004.

$$w = w_H = \frac{p_0 a^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \left(1 + \frac{m\pi y}{a}\right) e^{-(m\pi y/a)} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad \text{para } m = 1, 3, 5 \dots \quad (16)$$

$$w = w_H = \frac{p_0 a^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-(m\pi y/a)}}{m^4} \left(1 + \frac{m\pi y}{a}\right) \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi c}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (17)$$

para  $m = 1, 3, 5 \dots, y \geq 0$

A Equação 17 pode ser também adaptada para uma carga pontual, segundo Szilard (2004), fazendo  $P = p_0 c$  e  $\sin(m\pi c/2a) \approx m\pi c/2a$  obtendo a Equação 18 apresentada abaixo.

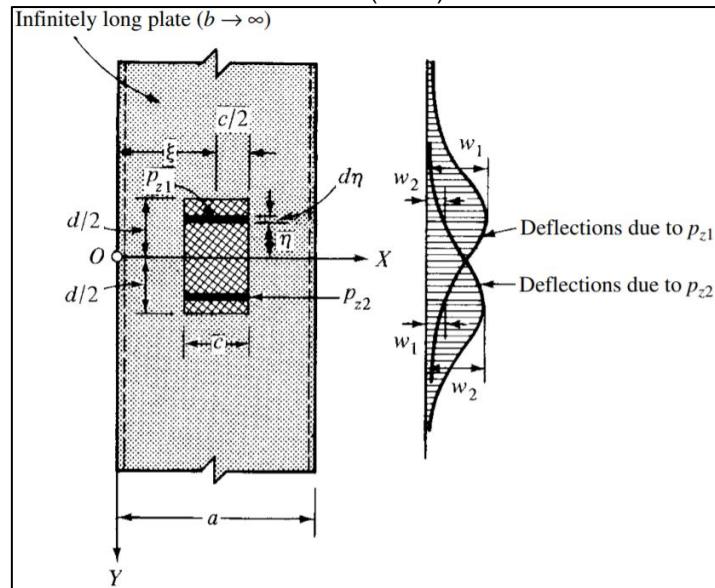
$$w = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-(m\pi y/a)}}{m^3} \left(1 + \frac{m\pi y}{a}\right) \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (18)$$



para  $m = 1, 2, 3, \dots, y \geq 0$

Por fim, para se obter uma solução para uma carga distribuída sobre uma região retangular (Figura 19), segundo Szilard (2004), pode-se considerar a superposição de várias cargas lineares parciais utilizando a Equação 17.

Figura 19: Forma da solução para carga distribuída sobre uma região retangular segundo Szilard (2004).



Fonte: Szilard, 2004.

## PROCESSO DE CRITÉRIO DE PARADA UTILIZADO NO MÓDULO

O critério de parada das equações de Lévy inseridas no módulo dependem de duas variáveis, sendo elas a tolerância em porcentagem escolhida pelo usuário ou o valor máximo do termo “m” utilizando dentro das funções de Lévy. Para o primeiro critério, é feita uma análise do valor da soma atual com relação à soma total até o momento e, caso a soma atual represente menos em módulo da porcentagem do que o valor da tolerância inserida, o cálculo do ponto para. Para o segundo critério de parada, caso o cálculo chegue no termo máximo de “m” definido antes de atingir a tolerância desejada, o cálculo do ponto para, ou seja, o programa só para o cálculo com o segundo critério caso ele aconteça antes do primeiro.

Para ilustrar a análise do funcionamento desses critérios dentro do programa, utiliza-se uma laje exemplo de 4x9m quadriapoiada com uma carga sobre toda a superfície de 5kN/m<sup>2</sup>, módulo de elasticidade de 210 GPa,

espessura de 3 cm e coeficiente de Poisson = 0. Na Tabela 1, mostram-se os resultados variando apenas a tolerância, onde foi definido um valor máximo “m” elevado, de modo a não ser utilizado no critério. Na Tabela 2 apresentam-se os resultados variando apenas o valor máximo de “m”, onde foi definido um valor de tolerância muito baixo que “força” o módulo a parar pelo segundo critério (de valor máximo de “m”). Além disso, na Figura 20, pode ser notada a diferença visual entre os extremos das comparações no caso da tolerância e no caso do valor máximo de “m” para a cortante no eixo x (Qx).

Tabela 1: Resultados do exemplo com variação da tolerância e número máximo de m = 500.

Tolerância (%)	Valores máximos obtidos					
	Qx (kN/m)	Qy (kN/m)	Mx (kN*m/m)	My (kN*m/m)	Mxy (kN*m/m)	Deslocamento (mm)
10	8,534	7,982	8,657	1,959	5,089	29,702
1	9,123	7,450	8,339	1,943	5,281	29,702
0,1	9,392	7,414	8,342	1,934	5,344	29,557
0,01	9,483	7,411	8,336	1,935	5,354	29,568
0,001	9,507	7,411	8,337	1,935	5,356	29,566
0,0001	9,507	7,411	8,337	1,935	5,357	29,566

Fonte: O próprio autor, 2021.

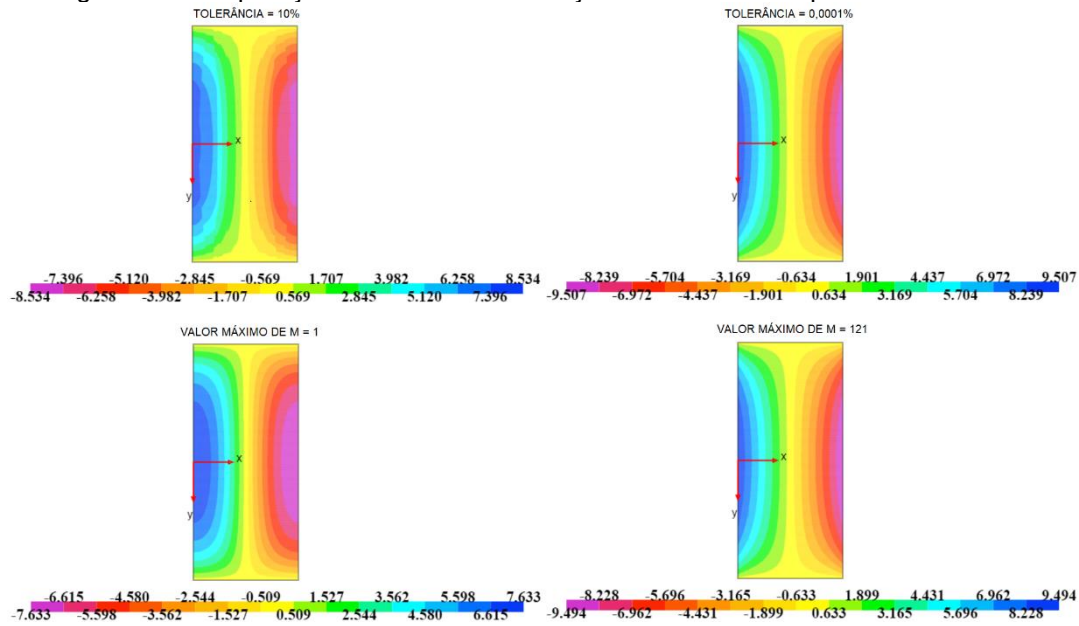
Tabela 2: Resultados do exemplo com variação do número máximo de m e tolerância = 0,0000001%.

Valor máximo de m	Valores máximos obtidos					
	Qx (kN/m)	Qy (kN/m)	Mx (kN*m/m)	My (kN*m/m)	Mxy (kN*m/m)	Deslocamento (mm)
1	7,633	8,092	8,657	1,959	5,089	29,702
5	8,858	7,515	8,358	1,935	5,322	29,568
15	9,274	7,395	8,335	1,935	5,352	29,566
31	9,401	7,407	8,337	1,935	5,355	29,566
61	9,462	7,412	8,337	1,935	5,356	29,566
121	9,494	7,411	8,337	1,935	5,357	29,566

Fonte: O próprio autor, 2021.

É notório que ambos os critérios de parada chegaram a valores iguais, em sua grande maioria, conforme a tolerância diminuía e o valor máximo de “m” era aumentado, o que indica que ambos os critérios podem ser usados de maneira eficiente. Sendo assim, cabe ao usuário utilizar uma combinação adequada às suas necessidades.

Figura 20: Comparação visual sobre a variação dos critérios de parada do módulo.



## EXEMPLO E ANÁLISE DE RESULTADOS

Para uma exemplificação prática dos resultados obtidos para a análise de lajes pelo método de Lévy, foi utilizada uma laje que pode ser vista na Figura 21, juntamente com seus dados de entrada, na qual foi inserida no programa IFESTRUT-LAJES.

Figura 21: Laje exemplo e seus dados.



Como pode ser visto na Figura 21, essa laje é de 4x7m, quadriapoiada, possui uma carga distribuída sobre toda a superfície de 8 kN/m<sup>2</sup>, módulo de elasticidade de 210 GPa, espessura de 5 cm e coeficiente de Poisson no valor

de 0,2. Além disso, para os dados referentes à solução de Lévy, foram utilizados os dados presentes na Figura 22.

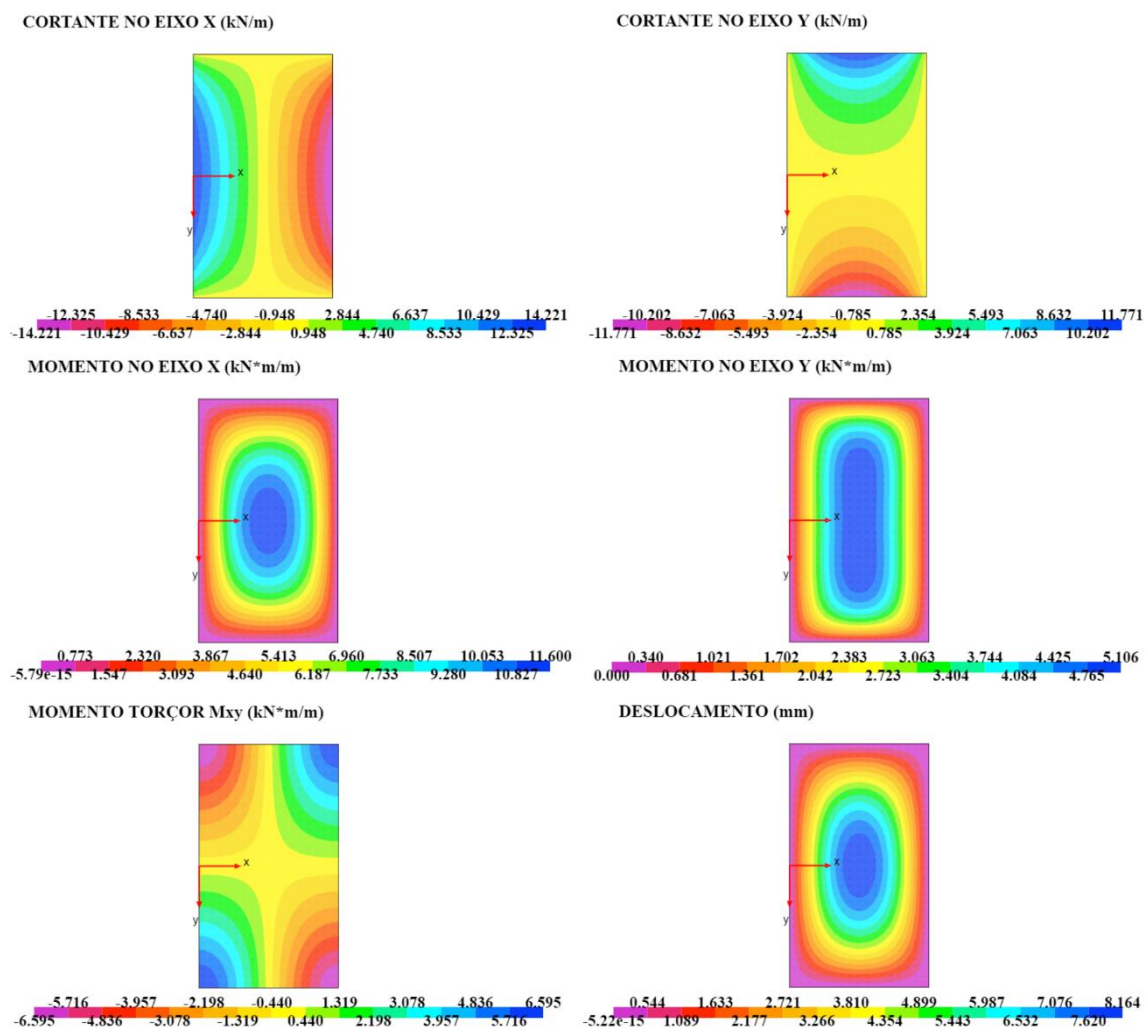
Figura 22: Dados utilizados para os cálculos da solução de Lévy.

Espaçamento dos pontos do diagrama (m):  [i](#)  
Tolerância:  % [i](#)  
Valor máximo de m:  [i](#)

Fonte: O próprio autor, 2021.

Na Figura 23 podem ser observados os diagramas obtidos.

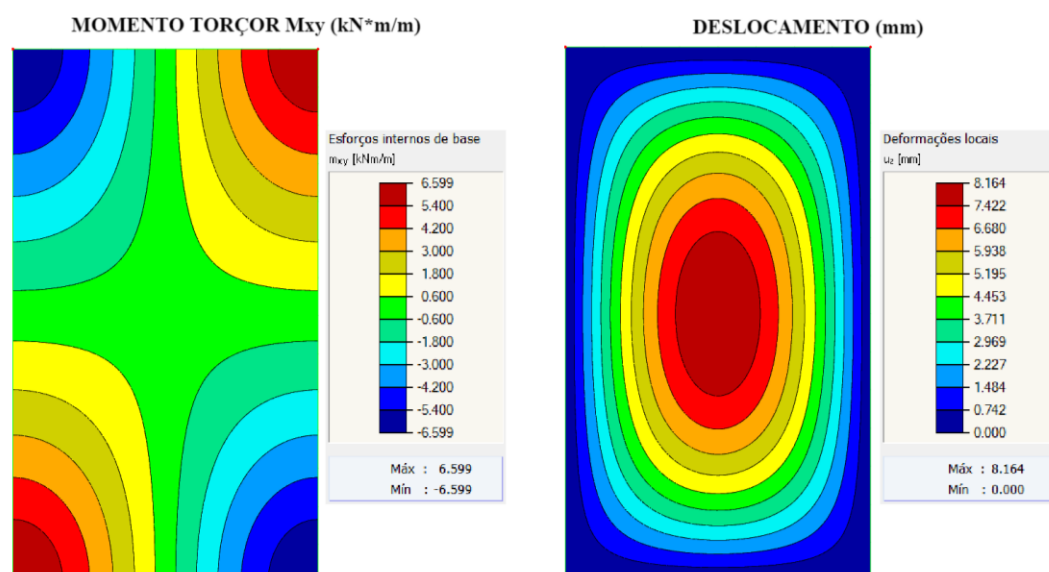
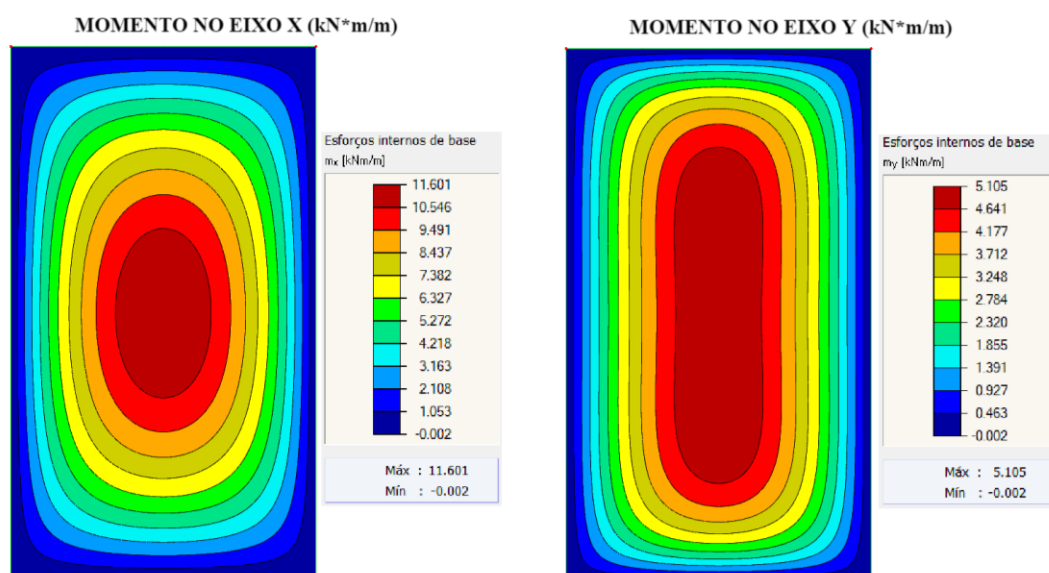
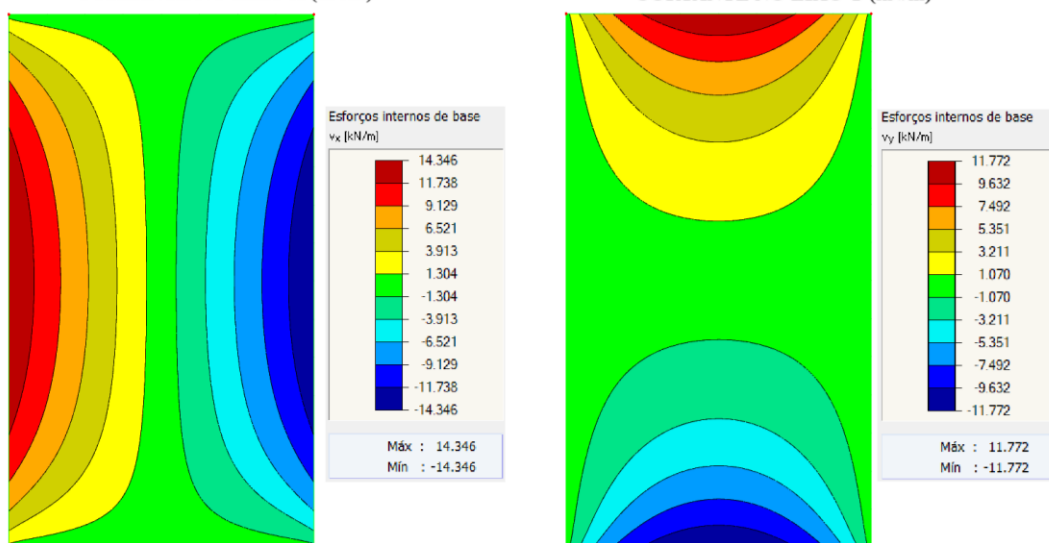
Figura 23: Diagramas gerados pelo módulo de Lévy para a laje exemplo.



Fonte: O próprio autor, 2021.

Para comparação de resultados, foi utilizado o *software* RFEM5 (DLUBAL, 2021), na qual foi utilizado o método dos elementos finitos (MEF) com uma malha de 2,5 centímetros, obtendo os diagramas presentes na Figura 24.

Figura 24: Diagramas obtidos pelo software RFEM (DLUBAL, 2021).  
**CORTANTE NO EIXO X (kN/m)** **CORTANTE NO EIXO Y (kN/m)**



Fonte: Adaptado de RFEM5, 2021.

Em termos visuais e de valores, os diagramas das figuras 23 e 24 são bem próximos, validando a programação realizada neste caso.

Para uma melhor comparação, também podem ser vistos, na Tabela 3, as diferenças percentuais entre alguns pontos calculados pelo método de Lévy e pelo *software* RFEM5 (DLUBAL, 2021). Vale ressaltar que as coordenadas presentes na Tabela 3 têm a origem conforme mostrado na Figura 23.

Tabela 3: Comparações entre Lévy e RFEM5 (MEF),  $\nu = 0,2$ .

<b>Esforço ou Deslocamento</b>	<b>x (m)</b>	<b>y (m)</b>	<b>Lévy</b>	<b>RFEM</b>	<b>Diferença (%)</b>
$Q_x$ (kN/m)	2,00	0,00	0,00000	0,00000	0,0000%
	3,00	0,50	-6.74076	-6.74088	0,0018%
$Q_y$ (kN/m)	2,00	0,00	0,00000	0,00000	0,0000%
	2,50	0,50	-0.61492	-0.61488	0,0065%
$M_x$ (kN.m/m)	2,00	0,00	11.60016	11.60100	0,0072%
	1,00	1,50	7.48659	7.48761	0,0136%
$M_y$ (kN.m/m)	2,00	0,00	5.07394	5.07365	0,0057%
	1,50	2,00	4.52544	4.52528	0,0035%
$M_{xy}$ (kN.m/m)	2,00	0,00	0,00000	0,00000	0,0000%
	2,50	1,50	-1.07891	-1.07889	0,0019%
$w$ (mm)	2,00	0,00	8.16441	8.16408	0,0040%
	0,50	2,00	2.17802	2.17792	0,0046%

Fonte: O próprio autor, 2021.

Conforme pode ser visto na Tabela 3, todos os pontos analisados apresentaram uma diferença percentual pequena, sendo menores que 0,015% em todos os casos analisados, novamente validando a programação realizada neste caso.

Realizando um teste com um valor máximo de  $m$  menor que o utilizado nas comparações ( $m = 5$ ) para o caso da cortante  $Q_x$  nas coordenadas  $x = 3$  e  $y = 0,5$  obtém-se o valor de -6.89223 kN/m, que representa uma diferença percentual de 2,25% em comparação ao valor obtido pelo *software* RFEM5 (DLUBAL, 2021) na Tabela 3, mostrando que, mesmo com poucos termos, o método de Lévy já apresenta valores admissíveis.

Também foi realizada uma comparação dos valores máximos de momentos obtidos pelo método de Lévy para a laje exemplo com os resultados obtidos por pelas tabelas de Pinheiro (2007), Marcus, disponíveis, por exemplo,

em WILLIAN (2021) e Czerny, disponíveis, por exemplo, em ARAÚJO (2015), como pode ser observado nas Tabelas 4, 5 e 6.

Tabela 4: Comparação de valores máximos de momentos obtidos por Lévy e Pinheiro.

<b>Momentos</b>	<b>x (m)</b>	<b>y (m)</b>	<b>Lévy</b>	<b>Pinheiro</b>	<b>Diferença (%)</b>
<i>M<sub>x</sub> (kN.m/m)</i>	2,00	0,00	11.60016	11.45600	1,243%
<i>M<sub>y</sub> (kN.m/m)</i>	2,00	0,00	5.07394	4.51840	10,949%

Fonte: O próprio autor, 2021.

Tabela 5: Comparação de valores máximos de momentos obtidos por Lévy e Marcus.

<b>Momentos</b>	<b>x (m)</b>	<b>y (m)</b>	<b>Lévy</b>	<b>Marcus</b>	<b>Diferença (%)</b>
<i>M<sub>x</sub> (kN.m/m)</i>	2,00	0,00	11.60016	10.90290	6,011%
<i>M<sub>y</sub> (kN.m/m)</i>	2,00	0,00	5.07394	3.56050	29,828%

Fonte: O próprio autor, 2021.

Tabela 6: Comparação de valores máximos de momentos obtidos por Lévy e Czerny.

<b>Momentos</b>	<b>x (m)</b>	<b>y (m)</b>	<b>Lévy</b>	<b>Czerny</b>	<b>Diferença (%)</b>
<i>M<sub>x</sub> (kN.m/m)</i>	2,00	0,00	11.60016	11.85185	2,170%
<i>M<sub>y</sub> (kN.m/m)</i>	2,00	0,00	5.07394	5.44681	7,349%

Fonte: O próprio autor, 2021.

Pelas tabelas apresentadas fica evidente que a diferença percentual entre os momentos  $M_x$  foram menores que entre os momentos  $M_y$ , que chegaram a ser 29,828% em um dos casos.

#### CONCLUSÃO (RESULTADOS DA PESQUISA)

Apesar de o método de Lévy ser uma solução cuja teoria é cheia de detalhes e condições específicas, os resultados obtidos nesse projeto se apresentam de forma satisfatória, uma vez que, em comparação com outro programa e método, são coerentes e apresentam pequena diferença percentual. Ressalta-se que o módulo presente no IFESTRUT-LAJES apresenta o relatório em PDF, que é o principal foco, pois pode ser usado por alunos e/ou professores como método de estudo ou metodologia de ensino.

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, Alexandre Cantuária. **Tabelas Práticas para o Dimensionamento de Lajes em Concreto Armado com Base na NBR 6118:2014**. 2015. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Católica de Brasília, [S. l.], 2015. Disponível em: <<https://repositorio.ucb.br:9443/jspui/bitstream/123456789/8042/1/AlexandreCantu%C3%A1riaDeAra%C3%BAjoTCCGRADUACAO2015.pdf>>. Acesso em: 22 jul. 2021.

DIAS, Nickolas Leitão. **A Teoria da Flexão de Placas Envolvendo a Equação Diferencial de Lagrange**. 2019. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática Aplicada Bacharelado) - Universidade Federal do Rio Grande, 2019. Disponível em: <[https://imef.furg.br/images/stories/Monografias/Matematica\\_aplicada/2019/2019\\_2\\_Nickolas\\_Leitao\\_Dias.pdf](https://imef.furg.br/images/stories/Monografias/Matematica_aplicada/2019/2019_2_Nickolas_Leitao_Dias.pdf)>. Acesso em: 12 mar. 2021.

LISBÔA, Tales de Vargas. **Uma metodologia para a obtenção de respostas semi-analíticas para flexão linear e não-linear de placas semi-espessas**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre-RS, 2009. Disponível em: <<https://lume.ufrgs.br/handle/10183/18593>>. Acesso em: 26 jun. 2021.

PAMPUCH, Bartek; M., Libor. **PDFMake**: Biblioteca geradora de pdf. Versão 0.1.6.8. [S. l.], 20 jul. 2020. Disponível em: <<http://pdfmake.org/#/>>. Acesso em: 15 mar. 2021.

PINHEIRO, Libânio Miranda. **Tabelas de Lajes**. Universidade de São Paulo. São Carlos-SP, 2007. Disponível em: <<http://files.joaoluisfeis.webnode.com.br/200000052-9ac369bbf8/tabelas-lajes.pdf>>. Acesso em: 15 jun. 2021.

RFEM (DLUBAL, 2021) (Alemanha). **RFEM**: Programa estrutural de MEF para uso profissional. 5.25.02. Tiefenbach, 2021. Disponível em: <<https://www.dlubal.com/en/products/rfem-fea-software/what-is-rfem>>. Acesso em: 20 jun. 2021.



REFSNES DATA (Noruega). **W3Schools**: Site de desenvolvedores web. [S. l.], 1998. Disponível em: <<https://www.w3schools.com/>>. Acesso em: 20 mar. 2021.

SCHERFGEN, David. **Calculate derivatives online**. Derivative Calculator, 2021. Disponível em: <<https://www.derivative-calculator.net/>>. Acesso em: 20 abr. 2021.

SOARES, Adilson Moreira. **Análise comparativa de esforços e deflexões em placas retangulares finas**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Itajubá. Itajubá-MG, 2004. Disponível em: <<http://docplayer.com.br/82668953-Universidade-federal-de-itajuba.html>>. Acesso em: 28 jun. 2017.

**SweetAlert2**, versão 9.10.12. Disponível em: <<https://sweetalert2.github.io/>>. Acesso em: 22 mar. 2021.

SZILARD, Rudolph. **Theories and Applications of Plate Analysis**: classical, numerical and engineering methods. New Jersey: John Wiley & Sons, 2004.

Tabelas de Marcus - **Cálculo de lajes em cruz**. Disponível em: <<http://www.profwillian.com/concreto/TabelasMarcus.pdf>>. Acesso em: 05 jun. 2021.

TIMOSHENKO, S. **History of strength of materials**: with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures. Nova York: McGraw-Hill, 1953. Reimpressão, Nova York: Dover, 1983.

Assinatura do orientador: \_\_\_\_\_

Assinatura do bolsista: Jonatan Vitor

